17

Extensión de la geometría plana a la geometría sólida

17.1 SÓLIDOS

Un *sólido* es la porción de espacio comprendida entre superficies planas y curvas.

Así, la *pirámide* , el *cubo* , el *cono* , el *cilindro*  y la *esfera* , son sólidos.

Un sólido tiene tres dimensiones: largo, ancho y espesor.

Los ejemplos prácticos de sólidos incluyen una caja, un ladrillo, un bloque y una pelota. Éstos no son, sin embargo, los sólidos puros e ideales que conciernen a la geometría sólida. La geometría sólida estudia las propiedades geométricas de sólidos "perfectos". Éstas son su forma, tamaño, la relación de sus partes, y la relación entre sólidos; se descartan propiedades físicas tales como su color, peso o textura.

17.1A Clasificación de sólidos

Poliedros

Un *poliedro* es un sólido acotado únicamente por superficies planas. Así, la pirámide y el cubo son poliedros. El cono, el cilindro y la esfera no son poliedros, ya que tienen superficies curvas.

Las superficies que limitan a un poliedro son las caras; las líneas que resultan de la intersección de las caras son las aristas, y los puntos de intersección de las aristas son los vértices. La diagonal de un poliedro une dos vértices que no están en la misma cara.

Así, el poliedro mostrado en la figura 17-1 tiene seis caras. Dos de ellas son triángulos (ABC y CFG), y las otras cuatro son cuadriláteros. Nótese que $\overline{AF}$ es una diagonal del poliedro. El polígono sombreado $HJKL$ es una *sección del poliedro* tomada por la intersección de un sólido y un plano que pasa a través de él.

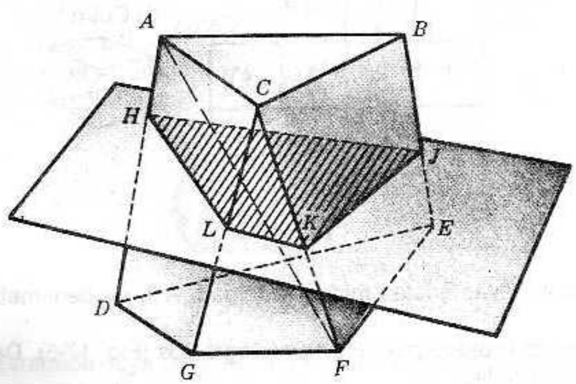


Fig. 17-1

El *ángulo diedral* es el ángulo que se forma entre dos caras que se intersectan. El ángulo entre las portadas de un libro es un ángulo diedral. Mientras más se abre el libro, el ángulo diedral crece siendo primero agudo, pasa a ser recto, obtuso y después derecho. El ángulo diedral puede calcularse encontrando el ángulo plano entre dos líneas, una en cada una de las caras, y sobre un plano perpendicular a la intersección entre las caras.

Prismas

Un *prisma* (Fig. 17-2) es un poliedro en el cual dos de sus caras son polígonos paralelos y las caras restantes son paralelogramos. Las bases de un prisma son los polígonos paralelos. Éstos pueden tener cualquier número de lados. Las *caras laterales* son paralelogramos. La distancia entre las dos bases es h; se calcula sobre una línea que forma un ángulo recto con ambas bases.

Un *prisma recto* es un prisma cuyas caras laterales son rectángulos. La distancia h es la altura de cualquier cara lateral.

Un *sólido rectangular* es un prisma acotado por seis rectángulos. Este sólido se puede construir por medio de un patrón de seis rectángulos, como se muestra en la figura 17-3, doblando a lo largo de las líneas punteadas. La longitud l, el ancho w, y la altura h son sus dimensiones.

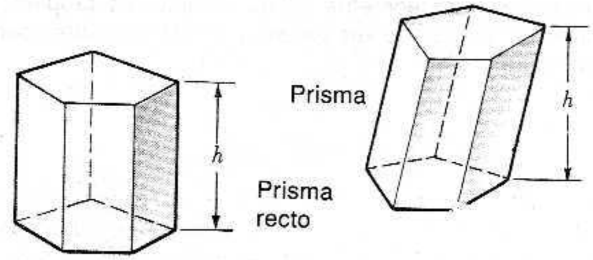


Fig. 17-2

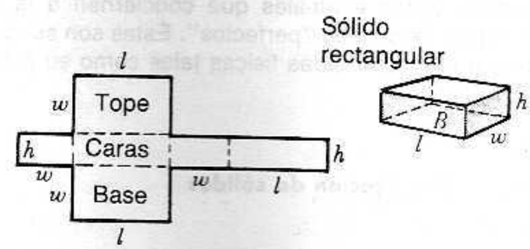


Fig. 17-3

Un *cubo* es un sólido rectangular acotado por seis cuadrados. Éste se puede construir por medio de un patrón de seis cuadrados, como se muestra en la figura 17-4, doblando a lo largo de las líneas punteadas. Cada una de las dimensiones iguales está representada por e en el diagrama.

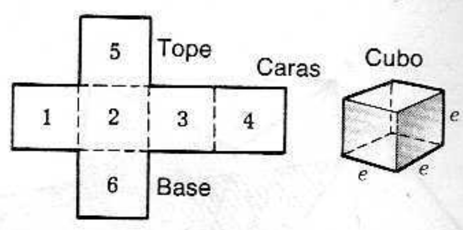


Fig. 17-4

Una *unidad cúbica* es un cubo cuyas aristas miden 1 unidad. Así, un centímetro cúbico es un cubo cuya arista mide 1 cm de longitud.

Un *paralelepípedo* es un prisma acotado por seis paralelogramos (Fig. 17-5). De modo que un sólido rectangular y un cubo son paralelepípedos especiales.

La tabla de la página siguiente muestra algunas relaciones entre polígonos en geometría plana y la relación correspondiente entre poliedros en geometría sólida.

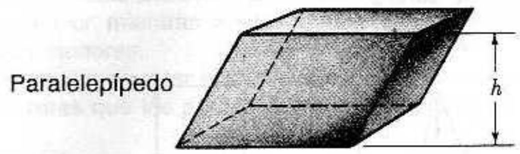


Fig. 17-5

Geometría plana		Geometría de los sólidos
Polígono	⟷	Poliedro
↓		↓
Cuadrilátero	⟷	Prisma
↓		↓
Paralelogramo	⟷	Paralelepípedo
↙ ↘		↙ ↘
Rectángulo, Cuadrado		Sólido rectangular, Cubo

Pirámides

Una *pirámide* es un poliedro cuya base es un polígono y cuyas otras caras se encuentran en un punto, su *vértice*. La base (B en la Fig. 17-6) puede tener cualquier número de lados. Sin embargo, las otras caras deben ser triángulos. La altura h, es la distancia desde el vértice a la base, la longitud de una línea desde el vértice en ángulo recto con la base.

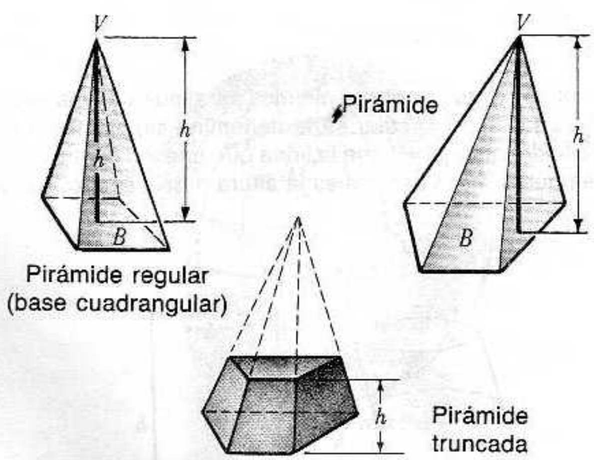


Fig. 17-6

Una *pirámide regular* es una pirámide cuya base es un polígono regular y cuya altura une el vértice con el centro de la base.

Una *pirámide truncada* es la parte de una pirámide que resulta si la parte superior de la pirámide se corta por medio de un plano paralelo a la base. Nótese en la figura 17-6 que sus caras laterales son trapezoides.

Conos

Un *cono circular* (Fig. 17-7) es un sólido cuya base es un círculo y cuya superficie lateral termina en un punto. (A un cono circular se le denomina simplemente cono.)

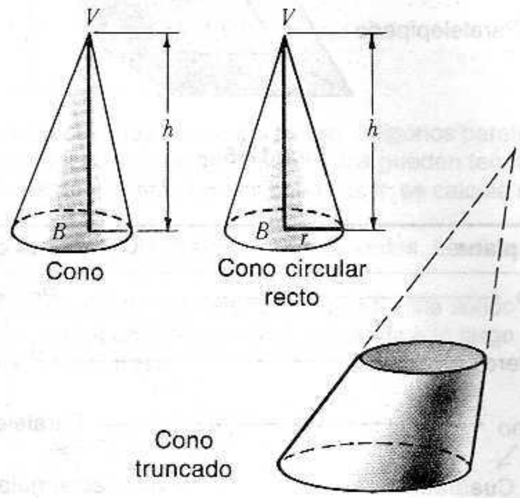


Fig. 17-7

Un *cono circular recto* se forma al rotar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Este cateto se convierte en la altura h del cono, y el otro cateto se convierte en el radio de la base.

Un *cono truncado* es la parte de un cono que resulta si se corta la parte superior del cono por medio de un plano paralelo a la base.

Cilindros

Un *cilindro circular* (Fig. 17-8) es un sólido cuyas bases son círculos paralelos y cuyas secciones transversales paralelas a las bases son también círculos. (A un cilindro circular se le denomina simplemente cilindro.)

Un *cilindro circular recto* es un cilindro circular tal que la línea que une los centros de las dos bases es perpendicular a los radios de las bases. La línea que une los centros es la altura h del cilindro, y el radio de las bases es el radio r del cilindro.

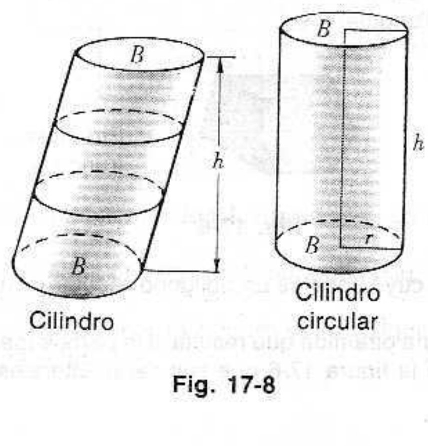


Fig. 17-8

Esferas

Una *esfera* es un sólido tal que cualquier punto de su superficie equidista de un punto fijo, su centro.

Una esfera se forma al rotar un semicírculo alrededor de su diámetro como eje. El punto terminal externo del radio perpendicular al eje genera un *círculo mayor*, mientras que los puntos terminales externos de las otras cuerdas perpendiculares al diámetro generan *círculos menores*.

Así, la esfera O en la figura 17-9 resulta de rotar el semicírculo $\overset{\frown}{ACB}$ alrededor de $\overline{AB}$ como eje. En el proceso, el punto C genera un círculo mayor mientras que los puntos E y G generan círculos menores.

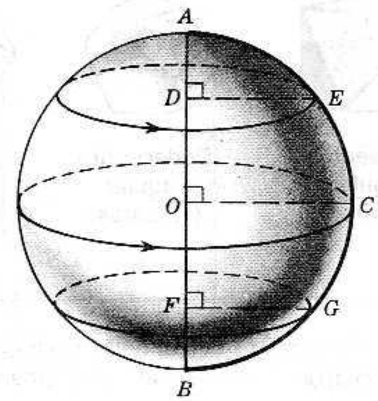


Fig. 17-9

Es más fácil entender la manera como se localizan los puntos sobre la superficie terrestre si se considera a la Tierra como una esfera formada al rotar el semicírculo NOS en la figura 17-10, el cual pasa por Greenwich, Inglaterra (cerca de Londres), alrededor de NS como eje. El punto O, a la mitad del camino entre N y S, genera el *ecuador*, EQ. Los puntos A y B generan *paralelos de latitud*, los cuales son círculos menores sobre la superficie terrestre paralelos al ecuador. Cada posición del semicírculo rotado es un semi-meridiano o *longitud*. (Un *meridiano* es un círculo mayor que pasa por los polos Norte y Sur.) Al meridiano que pasa por Greenwich se le denomina meridiano Primo.

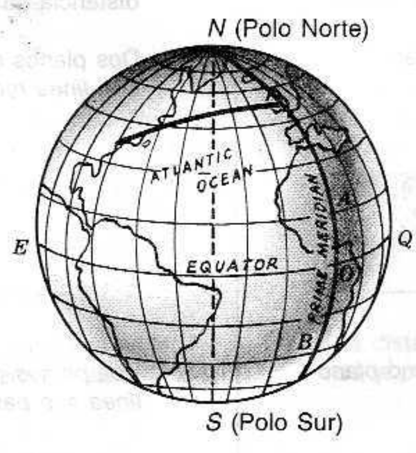


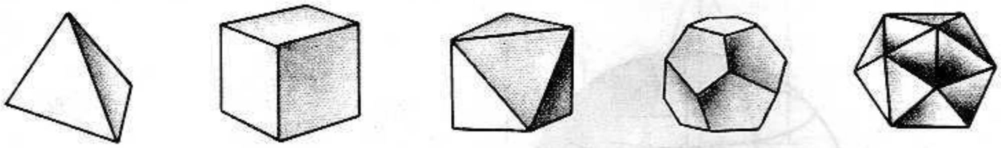
Fig. 17-10

Si se utiliza la intersección entre el ecuador y el meridiano Primo como origen, se puede localizar la ciudad de Nueva York a $40°48\frac{1}{2}'$ de latitud norte y $73°57\frac{1}{2}'$ de longitud oeste. El arco remarcado que se muestra sobre el globo terráqueo es un arco del círculo mayor que pasa por Nueva York y Londres. Los arcos de este tipo determinan la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie terrestre. Se puede encontrar esta línea si se estira una liga elástica entre Nueva York y Londres, sobre un globo terráqueo.

17.1B Poliedros regulares

Los poliedros regulares son sólidos que tienen polígonos regulares como caras, de manera que en cada vértice se intersecta el mismo número de caras. Sólo existen cinco sólidos de este tipo, como se muestra en la figura 17-11. Nótese que sus caras son triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares.

Los hexágonos regulares no pueden ser caras de poliedros regulares, ya que si tres hexágonos regulares tienen un vértice en común (Fig. 17-12), la suma de los tres ángulos interiores en este vértice sería 3(120°) o 360°. Como resultado, los tres hexágonos regulares estarían en un mismo plano, de modo que no pueden formar un sólido.



Tetraedro regular (4 caras) | Hexaedro regular (6 caras) | Octaedro regular (8 caras) | Dodecaedro regular (12 caras) | Icosaedro regular (20 caras)

Fig. 17-11

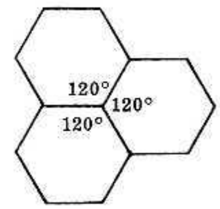
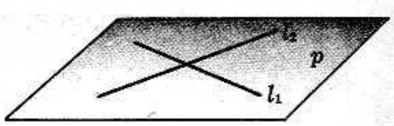
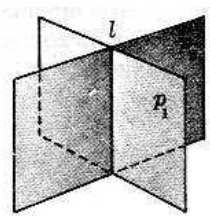
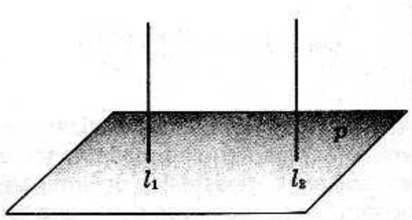
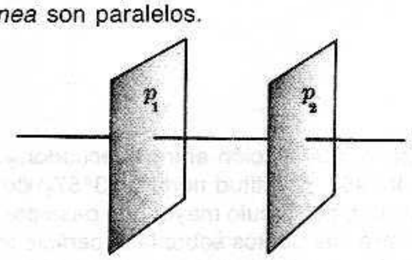


Fig. 17-12

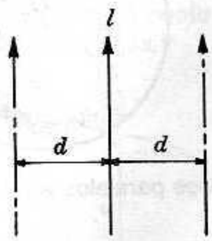
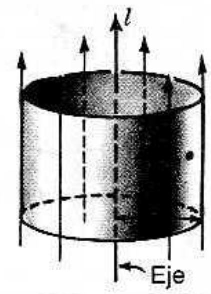
17.2 EXTENSIONES A LA GEOMETRÍA SÓLIDA

17.2A Extensiones de los principios de la geometría plana a principios de geometría espacial

"Esfera", en geometría espacial corresponde a "círculo" en geometría plana. Similarmente, "plano" corresponde a "línea recta". Si se intercambia "círculo" por "esfera", o "línea recta" por "plano", puede intercambiarse cualquiera de los siguientes *principios duales*. Cuando se efectúa esto, muchos de los principios de la geometría plana, principios con los cuales se está familiarizado, se convierten en principios de la geometría espacial.

Proposiciones duales relacionadas	
1. Todo punto sobre un *círculo* está a una distancia de un radio de su centro.	1. Todo punto sobre una *esfera* está a una distancia de un radio de su centro.
2. Dos *líneas* rectas que se intersectan determinan un *plano*. 	2. Dos planos que se intersectan determinan una *línea recta*. 
3. Dos *líneas* perpendiculares al mismo *plano* son paralelas. 	3. Dos *planos* perpendiculares a una misma *línea* son paralelos. 

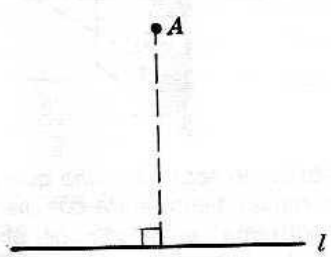
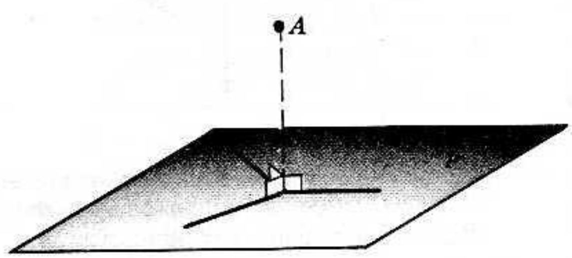
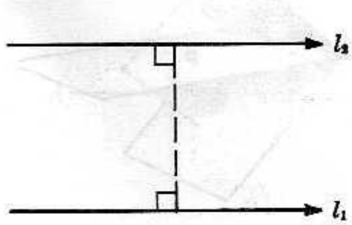
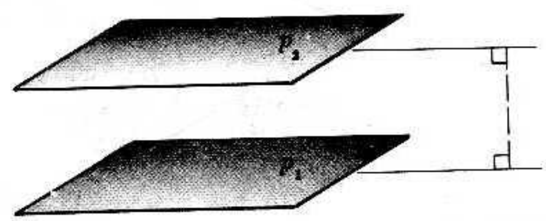
Al obtener proposiciones duales, debe asegurarse de que se realice un intercambio completo de los términos. Si el intercambio es incompleto, como en el siguiente par de proposiciones, no hay dualidad.

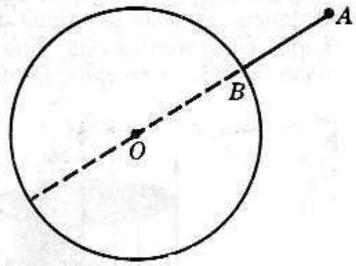
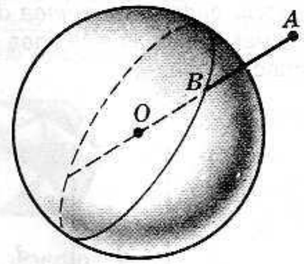
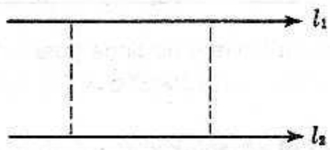
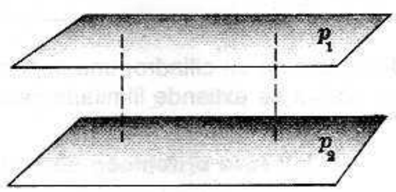
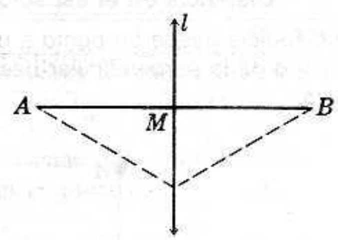
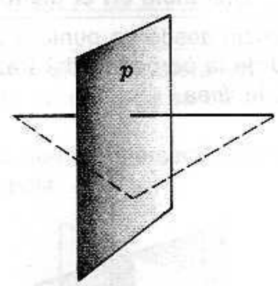
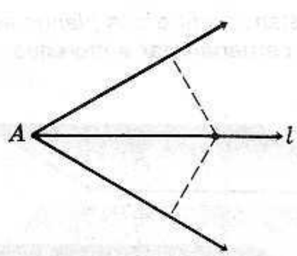
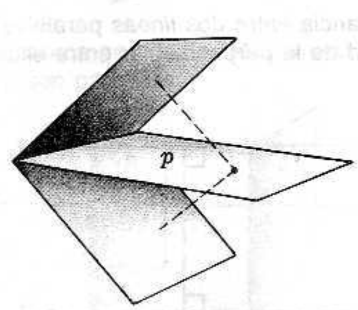
Proposiciones duales relacionadas	
4. El lugar geométrico de los puntos a una distancia dada de una *línea* dada es un par de líneas paralelas a la línea dada y a la distancia dada. 	4. El lugar geométrico de los puntos a una distancia dada de una *línea* dada es una superficie cilíndrica que tiene como eje la línea dada y como radio la distancia dada. 

A diferencia de un cilindro, una superficie cilíndrica se extiende sin límite y no tiene bases. De igual modo, una superficie cónica se extiende ilimitadamente y no tiene base.

Extensión de los principios de distancia

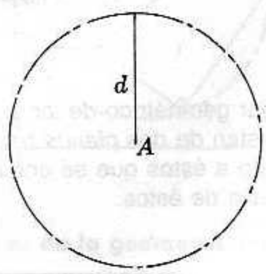
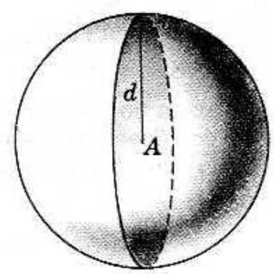
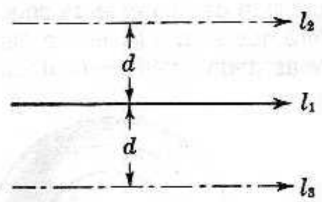
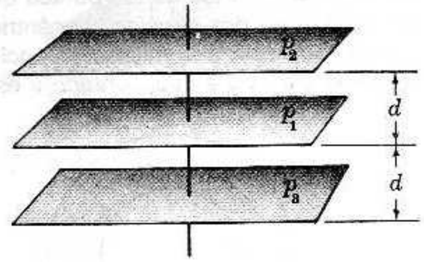
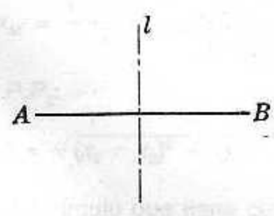
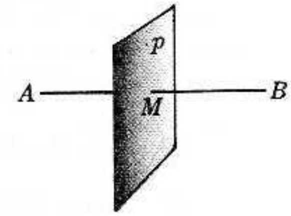
He aquí algunas proposiciones duales relacionadas con distancia —en el plano y en el espacio.

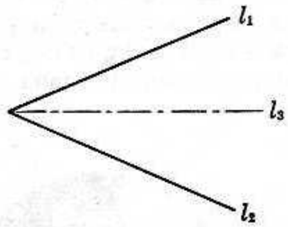
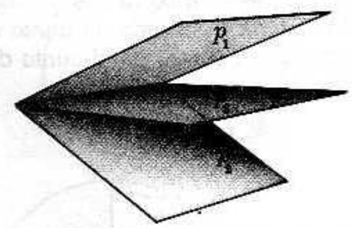
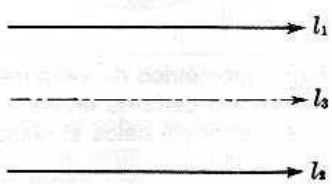
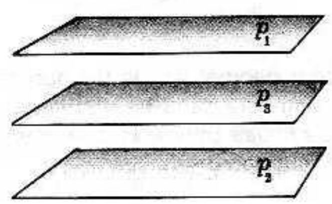
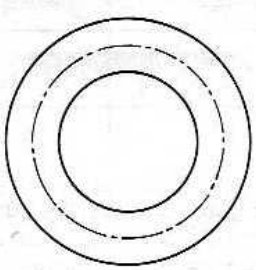
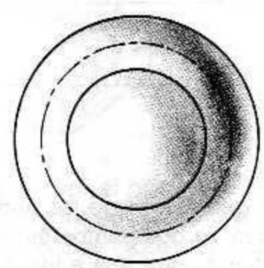
Distancia en el plano	Distancia en el espacio
1. La distancia desde un punto a una *línea* es la longitud de la perpendicular trazada desde el punto a la *línea*. 	1. La distancia desde un punto a un *plano* es la longitud de la perpendicular desde el punto al *plano*. 
2. La distancia entre dos *líneas* paralelas es la longitud de la perpendicular entre ellas. 	2. La distancia entre dos *planos* es la longitud de la perpendicular entre ellos. 

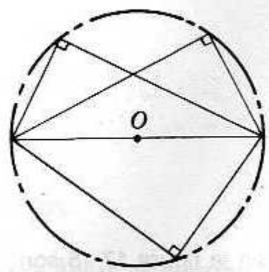
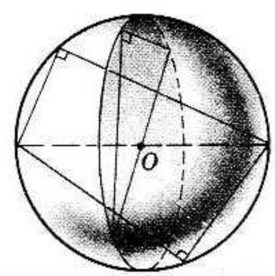
3. La distancia desde un punto a un *circulo* es la longitud del segmento externo de la secante desde el punto, a través del centro del *círculo*.	3. La distancia desde un punto a una *esfera* es la longitud del segmento externo de la secante desde el punto a través del centro de la *esfera*.
	
4. Las *líneas* paralelas equidistan en todo punto.	4. Los *planos* paralelos equidistan en todos sus puntos.
	
5. Cualquier punto sobre la *línea* que es la mediatriz de un segmento es equidistante de los puntos terminales del segmento.	5. Todo punto sobre el *plano* bisector de un segmento es equidistante de los puntos terminales del segmento.
	
6. Todo punto sobre la *bisectriz* del ángulo entre dos *líneas* es equidistante a los lados del ángulo	6. Todo punto sobre el *plano* que sea bisector del ángulo diedro entre dos *planos* es equidistante de los lados del ángulo.
	

Extensión de los principios sobre lúgares geométricos

Las siguientes proposiciones duales tratan sobre lugares geométricos —en el plano y en el espacio.

Lugares geométricos en el plano	**Lugares geométricos en el espacio**
1. El lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un punto dado es un *círculo* cuyo centro es el punto dado y cuyo radio es la distancia dada. 	1. El lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un punto dado es una *esfera* cuyo centro es el punto dado y cuyo radio es la distancia dada. 
2. El lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de una *línea* dada es un *par de líneas* paralelas a la *línea* dada, a la distancia dada. 	2. El lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un *plano* dado es un par de *planos* paralelos al *plano* dado, a la distancia dada. 
3. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos es la *línea* mediatriz del segmento que une a los dos puntos. 	3. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos es el *plano* que es el bisector perpendicular del segmento que une a los dos puntos. 

Lugares geométricos en el plano	Lugares geométricos en el espacio
4. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de las *líneas* que son los lados de un ángulo es la *línea* bisectriz del ángulo entre ellas.	4. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los *planos* que son los lados de un ángulo diedral es el *plano* bisector del ángulo entre éstos.
	
5. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos *líneas* paralelas es la *línea* paralela a éstas que está a la misma distancia de éstas.	5. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos *planos* paralelos es el *plano* paralelo a éstos que se encuentra a la misma distancia de éstos.
	
6. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos *círculos* concéntricos es el *círculo* que está a la misma distancia de los *círculos* dados y es concéntrico a éstos.	6. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos *esferas* concéntricas es la *esfera* que está a la misma distancia de las *esferas* dadas y es concéntrica a éstas.
	

Lugares geométricos en el plano	Lugares geométricos en el espacio
7. El lugar geométrico de los vértices de un triángulo rectángulo que tienen una hipotenusa dada es el círculo que tiene a la hipotenusa como diámetro. 	7. El lugar geométrico de los vértices de los triángulos rectángulos que tienen una hipotenusa dada es la *esfera* cuyo diámetro es la hipotenusa. 

17.2B Extensiones de la geometría analítica al espacio tridimensional

La geometría analítica de dos dimensiones puede extenderse fácilmente a tres dimensiones. La figura 17-13 muestra los ejes para dos y tres dimensiones; el eje z es perpendicular al eje x y al eje y. En la figura, las flechas indican la dirección positiva, y las líneas punteadas los ejes negativos.

He aquí cuatro extensiones de la geometría plana a la geometría en el espacio.

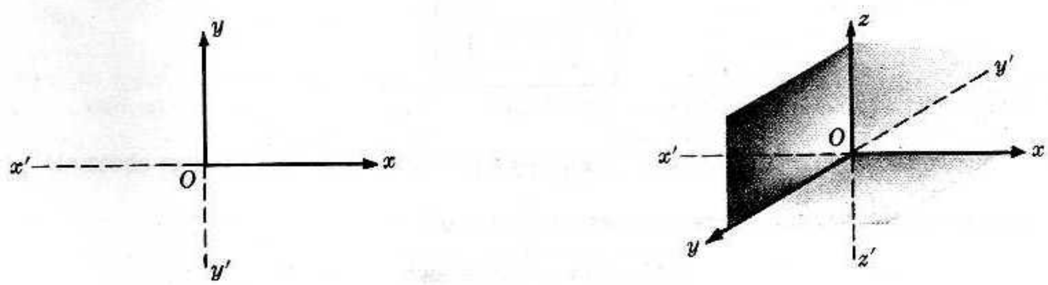


Fig. 17-13

Geometría analítica en el plano	Geometría analítica en el espacio
1. Coordenadas: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$	1. Coordenadas: $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$
2. Punto medio de $\overline{P_1P_2}$: $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$	2. Punto medio de $\overline{P_1P_2}$: $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$
3. Distancia P_1P_2: $d = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	3. Distancia P_1P_2: $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
4. Ecuación del círculo que tiene como centro al origen y radio r: $x^2 + y^2 = r^2$	4. Ecuación de la esfera que tiene como centro al origen y radio r: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

17.3 ÁREAS DE SÓLIDOS: MEDIDAS CUADRADAS

El área de cada una de las caras del cubo en la figura 17-14 es $A = e^2$. El área de superficie total S del *cubo* es por lo tanto

$$S = 6e^2$$

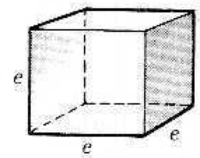


Fig. 17-14

Las áreas de los seis rectángulos que forman al sólido rectangular en la figura 17-15 son:

$A = lw$ para las caras superior e inferior

$A = lh$ para las caras frontal y posterior

$A = wh$ para las caras laterales

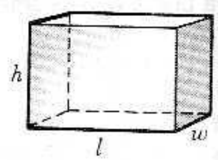


Fig. 17-15

El área de superficie total S del *sólido rectangular* es, por lo tanto

$$S = 2lw + 2lh + 2wh$$

El área de superficie total de la *esfera* en la figura 17-16 es

$$S = 4\pi r^2$$

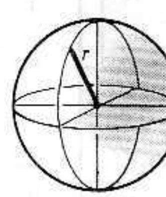


Fig. 17-16

El área de superficie total S del *cilindro circular recto* en la figura 17-17 es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

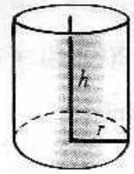


Fig. 17-17

PROBLEMAS RESUELTOS

17.1 CÁLCULO DE LAS ÁREAS DE SUPERFICIE TOTAL DE SÓLIDOS

Calcule, aproximando a enteros, el área de superficie total de:

(*a*) Un cubo cuya arista es de 5 m (Fig. 17-18)

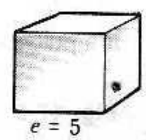


Fig. 17-18

(*b*) Un sólido rectangular con dimensiones de 10 pies, 7 pies y $4\frac{1}{2}$ pies (Fig. 17-19)

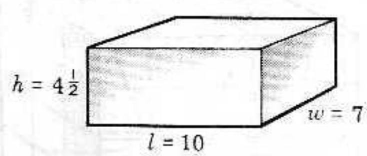


Fig. 17-19

(*c*) Una esfera con radio de 1.1 cm (Fig. 17-20)

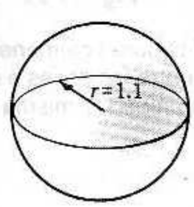


Fig. 17-20

Soluciones

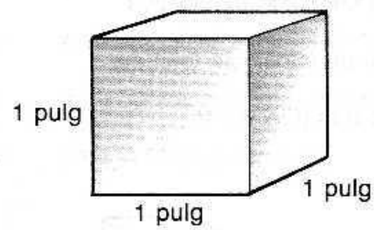
(*a*) $s = 6e^e = 6(5^2) = 150\ \text{m}^2$

(*b*) $s = 2lw + 2lh + 2wh = 2(10)(7) + 2(10)(4\frac{1}{2}) + 2(7)(4\frac{1}{2}) = 293\ \text{pies}^2$

(*c*) $s = 4\pi r^2 = 4(3.14)(1.1^2) = 15.1976\ \text{cm}^2$

17.4 VOLÚMENES DE SÓLIDOS: MEDIDAS CÚBICAS

Una *unidad cúbica* es un cubo cuya arista es de 1 unidad de longitud. Así, una pulgada cúbica es un cubo cuya arista es de 1 pulgada de longitud (Fig. 17-21).



Una pulgada cúbica

Fig. 17-21

El *volumen de un sólido* es el número de unidades que contiene. Así, una caja con 5 unidades de largo, 3 unidades de ancho y 4 unidades de altura tiene un volumen de 60 unidades cúbicas; es decir, tiene la capacidad o espacio suficiente para contener 60 unidades cúbicas (Fig. 17-22).

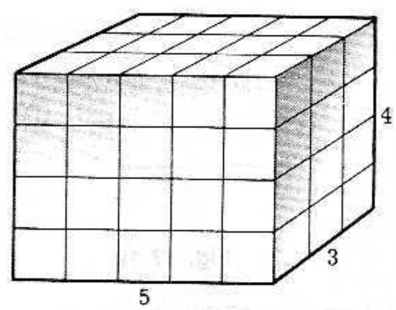


Fig. 17-22

A continuación se presentan algunas fórmulas para volúmenes de sólidos. En estas fórmulas, V es el volumen del sólido, B es el área de la base y h es la distancia entre las bases o entre el vértice y una base. En fórmulas de volumen, este último se da en unidades cúbicas, siendo la unidad la misma de las dimensiones. Así, si el lado de un cubo mide 3 metros, su volumen es 27 metros cúbicos.

1. *Rectángulo sólido* (Fig. 17-23): $V = lwh$

2. *Cilindro* (Fig. 17-24): $V = Bh$ o $V = \pi r^2 h$

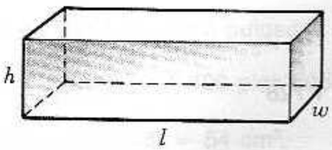


Fig. 17-23

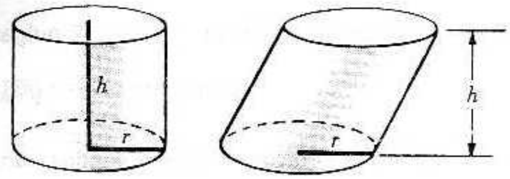


Fig. 17-24

3. *Prisma* (Fig. 17-25): $V = Bh$
4. *Cubo* (Fig. 17-26): $V = e^3$

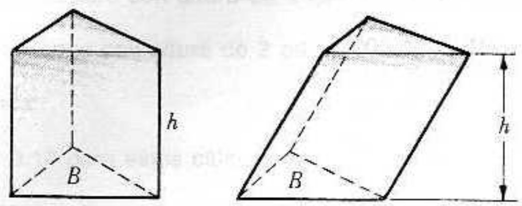


Fig. 17-25

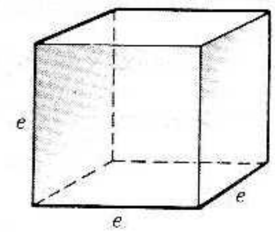


Fig. 17-26

5. *Pirámide* (Fig. 17-27): $V = \frac{1}{3}Bh$
6. *Cono* (Fig. 17-28): $V = \frac{1}{3}Bh$ o $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
7. *Esfera* (Fig. 17-29): $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

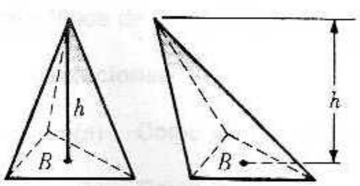


Fig. 17-27

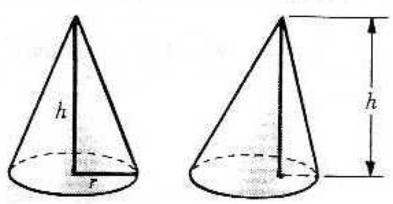


Fig. 17-28

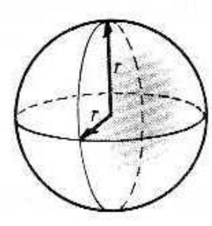


Fig. 17-29

PROBLEMAS RESUELTOS

17.2 Relaciones Entre Unidades Cúbicas

Encuentre el volumen V de

(*a*) Un pie cúbico en pulgadas cúbicas

(*b*) Una yarda cúbica en pies cúbicos

(*c*) Un litro (decímetro cúbico) en centímetros cúbicos

Soluciones

(*a*) $V = e^3$ para un cubo. Como 1 pie = 12 pulgadas

$$V = 12^3 = 1\,728$$

por lo que 1 pie cúbico = 1 728 pulgadas cúbicas.

(*b*) $V = e^3$ para un cubo. Como 1 yarda = 3 pies

$$V = 3^3 = 27$$

por lo que 1 yarda cúbica = 27 pies cúbicos.

(*c*) $V = e^3$ para un cubo. Como 1 dm^3 = 10 cm^3,

$$V = 10^3 = 1\,000$$

por lo que 1 litro = 1 000 cm^3

17.3 Cálculo de los Volúmenes de Cubos

Calcule el volumen V de un cubo, en pies cúbicos, si una arista es de (*a*) 4 pulgadas, (*b*) 4 pies, (*c*) 4 yardas.

Soluciones

Para calcular el volumen en pies cúbicos, se debe expresar el lado en pies.

(*a*) $V = e^3$ y como 4 pulgadas = $\frac{1}{3}$ pies

$$V = (\tfrac{1}{3})^3 = \tfrac{1}{27} \text{ pies}$$

(*b*) $V = e^3 = 4^3 = 64$ pies^3.

(*c*) $V = e^3$, y como 4 yardas = 12 pies

$$V = 12^3 = 1\,728 \text{ pies}^3$$

17.4 Cálculo de los Volúmenes de un Sólido Rectangular, un Prisma y una Pirámide

Calcule el volumen de

(*a*) Un sólido rectangular que tiene de longitud 6 pulgadas, de ancho 4 pulgadas y de altura 1 pie.

(*b*) Un prisma que tiene de altura 15 yardas y una base triangular de 120 pies cuadrados.

(*c*) Una pirámide que tiene 8 cm de altura y una base cuadrada cuyo lado es de $4\frac{1}{2}$ cm.

Soluciones

(*a*) $V = lwh = 6(4)(12) = 288$ pulgadas cúbicas.

(*b*) $V = Bh = 120(45) = 5\,400$ pies cúbicos $=$ 200 yardas cúbicas.

(*c*) $V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}(\frac{9}{2})^2(8) = 54\ \text{cm}^3$.

17.5 Cálculo de los Volúmenes de una Esfera, Cilindro y Cono

Calcule el volumen aproximando el resultado al entero más cercano, de

(*a*) Una esfera con radio de 19 pulgadas.

(*b*) Un cilindro con altura de 4 yardas y una base cuyo radio es de 2 pies.

(*c*) Un cono con altura de 2 pies y una base cuyo radio es de 2 yardas.

Soluciones

Sea $\pi = 3.14$ para estos cálculos

(*a*) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}(3.14)10^3 = 4\,186\frac{2}{3}$ pulgadas cúbicas.

(*b*) $V = \pi r^2 h = (3.14)(2^2)12 = 150.72$ pies cúbicos.

(*c*) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}(3.14)(6^2)(2) = 75.36$ pies cúbicos.

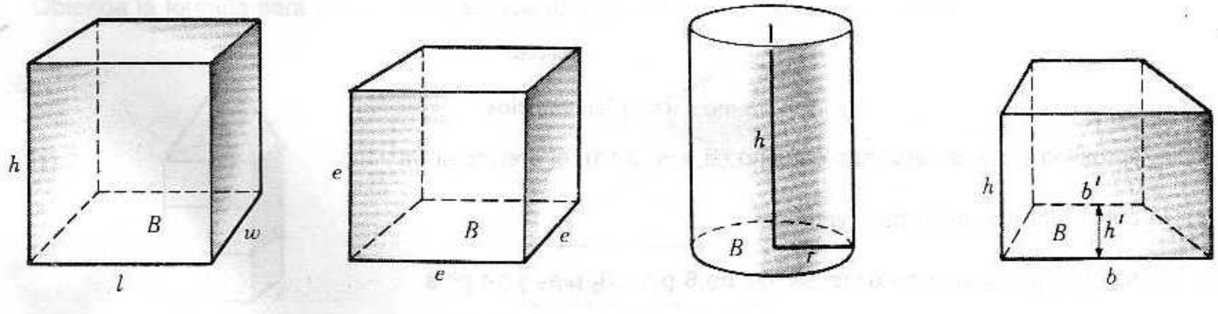
17.6 Derivación de Fórmulas a Partir de $V = Bh$

A partir de $V = Bh$, la fórmula para el volumen de un prisma o un cilindro, obtenga las fórmulas para el volumen de los sólidos de la figura 17-30.

Soluciones

(*a*) Como $B = lw$, $V = Bh = lwh$.

(*b*) Como $B = e^2$ y $h = e$, $V = Bh = (e^2)e = e^3$.



(*a*) Sólido rectangular (*b*) Cubo (*c*) Cilindro circular (*d*) Prisma recto con base trapezoidal

Fig. 17-30

(*c*) Como $B = \pi r^2$, $V = Bh = \pi r^2 h$.

(*d*) Como $b = \frac{h'}{2}(b + b')$, $V = Bh = \frac{h'}{2}(b + b')h = \frac{hh'}{2}(b + b')$.

17.7 Fórmulas para volúmenes combinados

Indique la fórmula para el volumen de cada uno de los sólidos de la figura 17-31.

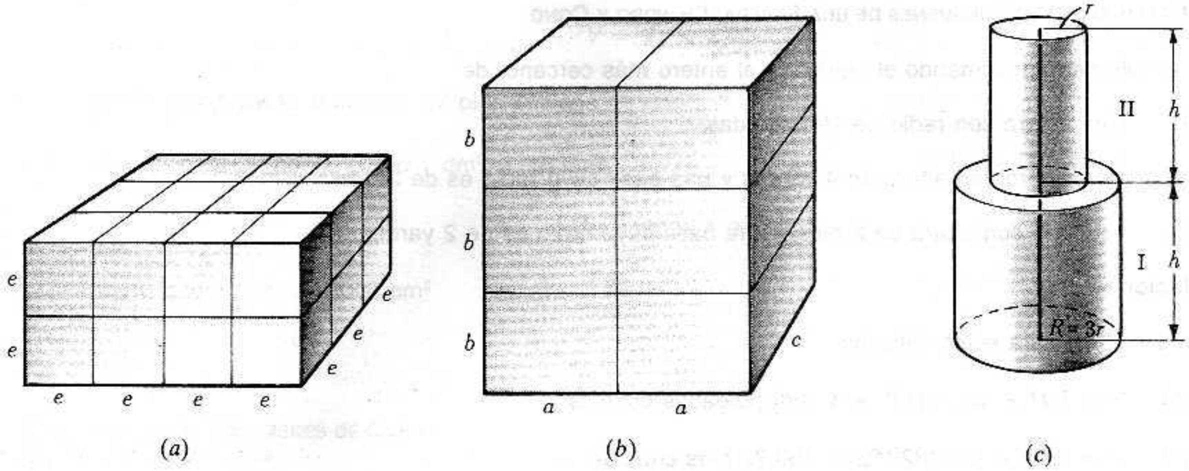


Fig. 17-31

Soluciones

(*a*) $V = lwh$ para este sólido. Ahora $l = 4e$, $w = 3e$ y $h = 2e$. De modo que

$$V = (4e)(3e)(2e) = 24e^3.$$

(*b*) $V = lwh$ de nuevo. Aquí $l = 2a$, $w = c$ y $h = 3b$. Por lo que

$$V = (2a)(c)(3b) = 6abc.$$

(*c*) Aquí $V = V_{\text{cil. I}} + V_{\text{cil. II}} = \pi R^2 h + \pi r^2 h$. Pero $R = 3r$, así

$$V = \pi(3r)^2 h + \pi r^2 h = 10\pi r^2 h.$$

Problemas complementarios

1. Calcule, aproximando al entero más cercano (si $\pi = 3.14$), el área total de (17.1)

(*a*) Un cubo con una arista de 7 yardas

(*b*) Un sólido rectangular con dimensiones de 8 pies, $6\frac{1}{2}$ pies y 14 pies

(*c*) Una esfera con radio de 30 m

(*d*) Un cilindro de revolución con radio de 10 rd y una altura de $4\frac{1}{2}$ rd [*Sugerencia*: Utilice $T = 2\pi r(r + h)$]

2. Calcule el volumen de

(*a*) Una yarda cúbica en pulgadas cúbicas

(*b*) Un metro cúbico en centímetros cúbicos (1 m = 100 cm)

3. Calcule, aproximando a la pulgada cúbica más cercana, el volumen de un cubo cuya arista es de (*a*) 3 pulgadas; (*b*) $4\frac{1}{2}$ pulgadas; (*c*) 7.5 pulgadas; (*d*) 0.3 pies; (*e*) 1 pie 2 pulgadas. (17.3)

4. Calcule, aproximando al entero más cercano, el volumen de (17.4)

(*a*) Un sólido rectangular con longitud de 3 pulgadas, ancho de $8\frac{1}{2}$ pulgadas y altura de 8 pulgadas

(*b*) Un prisma que tiene de altura 2 pies y una base cuadrada cuyo lado es de 3 yardas.

(*c*) Una pirámide que tiene altura 2 yardas y una base cuyas áreas es de 6.4 pies cuadrados.

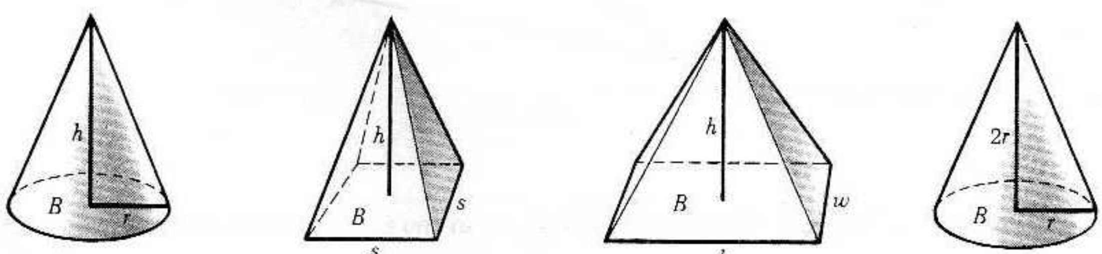
5. Calcule, aproximando al entero más cercano, el volumen de (17.5)

(*a*) Una esfera con radio de 6 m

(*b*) Un cilindro que tiene de altura 10 pies y una base cuyo radio es de 2 yardas.

(*c*) Un cono que tiene de altura 3 yardas y una base cuyo radio es de 1.4 pies

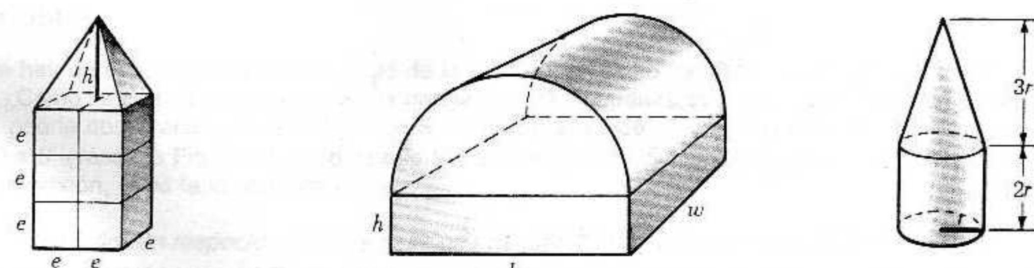
6. A partir de $V = \frac{1}{3}Bh$, la fórmula del volumen para una pirámide o un cono, obtenga las fórmulas para el volumen de cada uno de los sólidos de la figura 17-32.



(*a*) Cono (*b*) Pirámide con base cuadrada. (*c*) Pirámide con base rectangular (*d*) Cono donde $h = 2r$

Fig. 17-32

7. Obtenga la fórmula para el volumen de cada uno de los sólidos de la figura 17-33 (17.7)



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 17-33